تاریخ دریافت مقاله: ۹۰/۲/۲۲
تاریخ پذیرش مقاله: ۹۱/۴/۱۹

ویژگی‌های هندسی و ریاضی در ساختار چفد پنج او هفت تند در پوشش تاق آهنگ‌ایرانی

نیما ولی‌بیگ* فاطمه مهدی‌زاده سراج فرهاد تهرانی*****

چکیده

در گذر زمان، از چفدهای گوناگونی برای ساخت پوشش‌های تاق‌آهنگ ایرانی بهره جسته‌اند؛ یکی از متداول‌ترین این چفدها، چفد پنج او هفت است. شیوه کشیدن و پیاده‌سازی این چفد ریخت‌های گوناگونی را پدید آورده است که همگی به‌نام چفد پنج او هفت خوانده می‌شود. هرکدام از این چفدها ویژگی‌های هندسی و ریاضی گوناگونی دارند. یکی از مسائل مهمی که منجر به تألیف کتاب مفتاح‌الحساب توسط غیاث‌الدین‌جمشید کاشانی در قرن نهم هجری شد، محاسبه مصالح به‌کاررفته در تاق‌ها و گنبدها بود. روش‌های ارائه‌شده در این مقاله ادامه‌ای است بر روش‌های محاسبات فوق. با به‌دست‌آمدن طول کمان هر چفد می‌توان با توجه به‌شیوه آجرچینی آن و ارتفاع ملات مابین آنها با تناسبی ساده تعداد آجر (یا هر مصالح دیگری که تاق با آن اجرا شده است) را محاسبه کرد. هم‌چنین می‌توان از این محاسبات برای بارگذاری و سایر اندازه‌های مورد نیاز در آنالیز استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ازگ (azag) به‌ویژه سازه‌های سنتی بهره برد. این مقاله به‌شیوه‌های گوناگون کشیدن و آنالیز ریاضی و هندسی آنها پرداخته، فرم‌های پدیدآمده را باهم مقایسه کرده است. با بررسی‌های انجام‌شده، مشخص شد که نه‌تنها این چفدها که نام یکسان دارند ازلحاظ بلندا و دیگر ویژگی‌های هندسی مانند مرکز سطح و جرم همانند نیستند، بلکه ازلحاظ ریاضی (طول کمان، مساحت و...) نیز دارای ویژگی‌های متفاوتی هستند.

کلیدواژه‌ها: چفد، پنج او هفت، تاق‌آهنگ، آنالیز هندسی، آنالیز ریاضی

---

* دانشجوی دکترا مرمت بنا و بافت تاریخی، دانشگاه هنر اصفهان (نویسنده مسئول).
n.valibeig@aui.ac.ir & nima876@yahoo.com
** استادیار دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه علم‌وصنعت، تهران.
*** دانشیار دانشکده معماری و شهرسازی، دانشگاه شهیدبهشتی، تهران.

مقدمه و طرح مسئله

در سرزمینی که در بیش‌تر بخش‌های آن چوب در دسترس نیست، معماران به ساخت سرپناه‌هایی روی آورده‌اند که هم پاسخگوی نیاز کاربردی فضا باشد و هم از ساخت مایه‌های بوم‌آورد (محلی) در آن بهره جسته باشند. از این‌رو، در پوشش‌های ازگاز کمان، چفد، تویزه و تاق تا گنبد و تاق‌نما از فرم‌های خمیده کمک گرفته‌اند. درمیان چفدها، چفد پنج او هفت از پرکاربردترین آنها می‌باشد، این چفد به‌شیوه‌های گوناگونی ترسیم شده است که هم ازجهت فرم و هم ازجهت باربری توانایی‌های گوناگونی دارند. این مقاله با ترسیم دقیق آنها و مقایسه بخش‌های گوناگون این چفدها برای مهندسان سازه و افرادی که در مدل‌کردن بناهای تاریخی دربرابر نیروها به‌ویژه زمین‌لرزه کار می‌کنند، سودمند خواهد بود و ازسوی‌دیگر، راه‌گشایی است برای معماران سنتی که با مقایسه نتایج حاصله شیوه صحیح را برگزینند. همچنین، این مقاله می‌تواند در انتخاب روش اجرایی صحیح و مسائل مربوط به متره، برآورد و حجم مصالح مورد نظر و تهیه صورت وضعیت کارا باشد. محاسبات ریاضی و هندسی مورد نظر ازلحاظ پایداری تاق مورد نظر دربرابر زمین‌لرزه و سایر نیروهای جانبی نیز می‌تواند راهگشا باشد.

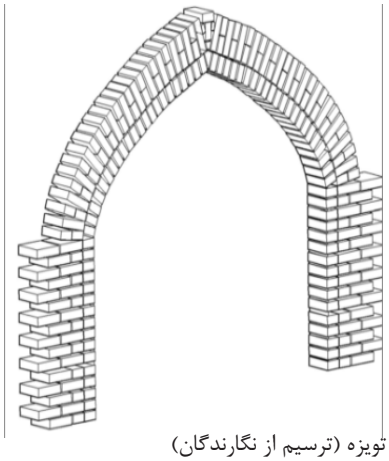
پژوهشگران پیشین که روی پوشش‌ها و چفدهای معماری ایرانی تحقیق کرده‌اند، کمتر به جنبه‌های هندسی آن پرداخته‌اند. آندره گدار در کتاب آثار ایران یک بخش را به‌طور کامل به تاق‌های ایرانی اختصاص داده (گدار، ۱۳۷۵)، وی در این بخش تاق‌ها را با توجه به تکنیک‌های ساخت بررسی کرده است. لیزا گلمبک و دونالد ویلبر نیز تاق‌ها و چفدها را بررسی کرده‌اند (گلمبک، ۱۳۷۴). متأسفانه بسیاری از چفدها در این کتاب اشتباه ترسیم شده است. همچنین رولان بزنوال و آرتور آپهام پوپ نیز با دید تکنیکی و تاریخی به تاق‌ها و چفدهای ایرانی پرداخته‌اند. از پژوهشگران ایرانی نیز پیرنیا و معماریان در این زمینه پژوهش‌هایی انجام داده‌اند. آنها نیز بیش‌تر به جنبه‌های تکنیکی و تنها به‌شیوه ترسیم اشاره کرده‌اند. بررسی چفدها و تاق‌ها با دید محاسباتی و مقایسه اجزا و شکل چفدها با دید هندسی برای نخستین بار توسط نگارندگان انجام پذیرفته است.

کمان، چفد، تویزه، تاق‌آهنگ

کمان یا قوس را می‌توان خمی دانست که بخشی از یک شکل هندسی مشخص است مانند بخشی از یک دایره، هذلولی یا هر منحنی شناخته‌شده هندسی؛ درصورتی‌که چفد را می‌توان آمیزه‌ای از چند کمان دانست (پیرنیا، ۱۳۷۸: ۴۵). کمان و چفد اثر قلمبر روی کاغذ، چوب یا گچ روی سطح زمین (نکیزکردن) است، پس دارای ضخامت نیست و به‌زبان ریاضی فقط دارای طول و عرض (x,y) هستند. اگر این چفد را روی زمین نکیز کنند و قالبی از گچ بسازند، به آن شابلون یا تویزه گچی یا لنگه گچی می‌گویند (تصویر۱). از این شابلون می‌توان برای ساخت عنصر باربر معماری ایرانی کمک گرفت. کافی است دو ستون عمودی ساخته، این شابلون را روی آن در صفحه‌ای عمود بر سطح زمین واداشته (نصب کرده) و پیرامون آن تیری خمیده پدید آورده شود که این تیر خمیده را تویزه می‌نامند (تصویر۲).

برای ساخت تاق‌آهنگ باید در آغاز دو دیوار موازی و عمود بر سطح زمین پدید آورد و سپس شابلون گچی را در آغاز آن نصب کرد. اگر به‌شکل فرضی درراستای پاکار دو دیوار شابلون کشیده شود، شکلی تقریباً نیم‌استوانه پدید

تصویر۱. شابلون یا تویزه گچی، آرشیو میراث اصفهان



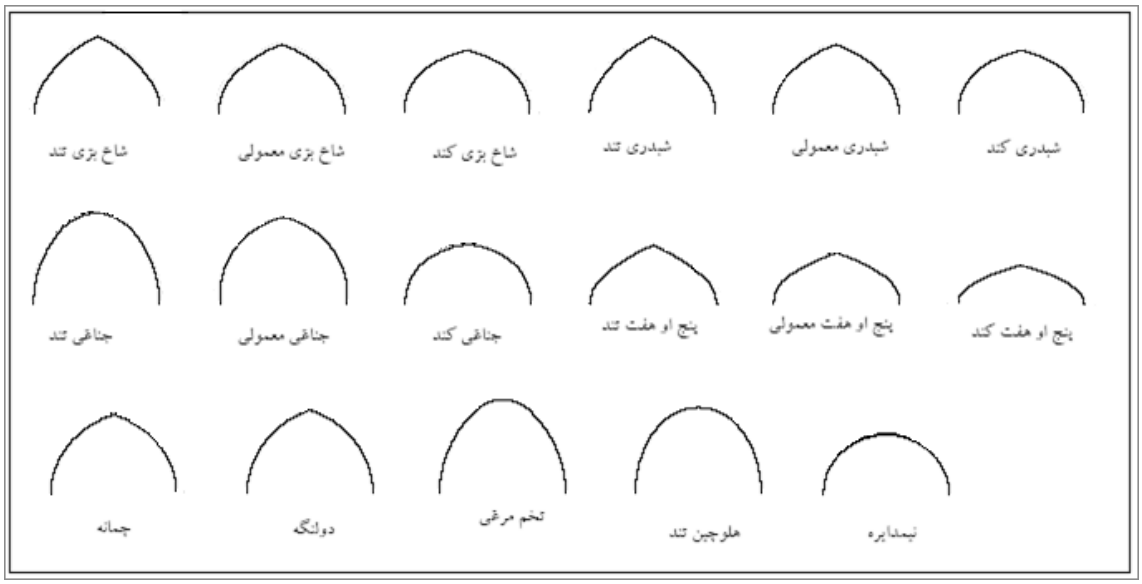
تصویر ۲. تویزه (ترسیم از نگارندگان)

می‌آید که به آن «تاق‌آهنگ»، «کوره‌پوش» یا «لوله‌ای» می‌گویند. این کار در معماری با شیوه‌های گوناگون ساخت و چیدمان آجر، سنگ و ... پدید می‌آید. برای ساخت تاق‌آهنگ روش‌های گوناگون دیگری نیز وجود دارد؛ یکی از مهم‌ترین روش‌ها برای ساخت تاق‌آهنگ کمک‌گرفتن از دیوار پشت‌بند است، در این روش دیگر نیازی به قالب نیست. روش استفاده از قالب باربر هم از روش‌های دیگر ساخت تاق‌آهنگ است (بحث در شیوه‌های ساخت و هندسه عملی نیاز به مقاله‌ای جداگانه دارد).

انواع چفدهای معماری و اجزای آن

ساده‌ترین کمان را در معماری می‌توان کمان نیم‌دایره دانست که معماران سنتی به آن چفد پردالی می‌گویند، آن را بسیار ناپایدار می‌دانند و از آن در ساخت تویزه یا تاق‌آهنگ استفاده نمی‌کنند. بخش‌های گوناگون چفد در دیدگاه معماران دارای اجزا و نام‌های گوناگونی است که به‌هرکدام از آنها پرداخته خواهد شد (تصویر ۳ و ۴).

با توجه به آنچه در جدول۱ آمده است، می‌توان چفدها را از جنبه‌های گوناگونی مانند کیفیت تحمل وزن،



تصویر۳. گونه‌هایی از چفدهای به‌کاررفته در معماری ایرانی، (تهیه و ترسیم از نگارندگان)

	ACD=۹۰°	تیزه (فراز) =D	کلاله= PD	افراز (بلندا)= CD
	ACP =۶۷/۵°	ایوارگاه=(Pپیرامون)		
		میان شانه=(Nپیرامون)	شانه= MP	دهانه= AB
	ACN =۴۵°	شکرگاه=(Mپیرامون)		
		پاکار (فرود)=A	بالنج (وارون)= AM	خیز= CD/AB
	ACM =۲۲/۵°	میان دهانه=C		

تصویر۴. بخش‌های گوناگون چفد، (مأخذ: نگارندگان)

جدول۱. دسته‌بندی چفدها از دیدگاه‌های گوناگون (مأخذ: نگارندگان)

از دیدگاه باربری	از دیدگاه تیزه	از دیدگاه خیز	از دیدگاه ریخت‌شناسی
۱. باربر ۲. غیر باربر	۱. مازه‌ای (بیز) ۲. تیزه‌دار (جناغی) ۳. کلیل (آمیزه مازه‌ای و تیزه‌دار) ۴. شکنجی	۱. تند ۲. تیز ۳. کند ۴. کفته	۱. شبدری ۲. سه‌بخشی ۳. پنج او هفت ۴. ...

تصویر۵. تاقنما با چفد مازه‌ای (بیز)، (نگارندگان)

تصویر۷. تویزه با چفد کلیل (نگارندگان)

چگونگی تیزه، میزان خیز و همچنین از منظر ریخت و فرم دسته‌بندی نمود.

چفد مازه‌ای چفدی است که در بخش بالایی (فراز) آن پیوستگی وجود دارد مانند چفدی که تاق‌ایوان کسری را می‌سازد و چفد تیزه‌دار چفدی است که در بالای آن ناپیوستگی یا تیزی وجود دارد مانند چفد ایوان ورودی مسجد جامع یزد و چفد کلیل آمیزه‌ای از چفدهای مازه‌ای و تیزه‌دار است. چفدهای شکنجی هم چفدهایی هستند که با چین‌وشکنج‌های گوناگون یعنی با فرم‌های محدب، مقعر و ترکیب آنها ساخته می‌شوند (تصویر ۵ تا ۸).

در برخی موارد در ساخت چفد اندکی پیش می‌نشستند که به این پیش‌نشستگی چانه یا لغا و اگر فرم کمان‌مانند داشته باشد، به آن گیلویی می‌گفتند. برخی موارد هم به‌ویژه در زمان ساسانیان به‌دلیل این‌که قالب را روی لبه پاکار می‌گذاشتند، پس از ساخت تاق و برداشتن قالب، تاق با پس‌نشستگی مشخص می‌شد که به این پس‌نشستگی، شانه یا هویه (هویه خود به‌معنای شانه است) می‌گفتند (تصویر ۹ و۱۰).

تصویر۶. تویزه با چفد تیزه‌دار (جناغی)، (نگارندگان)

تصویر۸. تویزه با چفد شکنجی (نگارندگان)

تصویر۹. اجرای شانه یا هویه (نگارندگان)

تصویر۱۰. اجرای چانه یا لغاز (نگارندگان)

تحلیل چفد پنج او هفت در معماری ایرانی

یکی از چفدها که در بناهای بسیاری از دوران کهن دیده می‌شود، چفد پنج او هفت است. کهن‌ترین نمونه‌های یافت‌شده از این چفد را می‌توان در هفت‌تپه و چغازنبیل دید (پیرنیا، ۱۳۷۳: ۹).

چفد پنج او هفت تند را می‌توان در بناهای تاریخی از ادوار گوناگون مشاهده کرد.

نمونه‌های کهن چفد پنج او هفت را در زیرزمین‌های زیگورات چغازنبیل متعلق به ۱۵۰۰ پیش از میلاد می‌توان دید.

در دوران اسلامی نیز نمونه‌های بسیاری از کاربرد این چفد را می‌توان دید. از این چفد در تویزه‌های باربر بسیاری استفاده می‌شود. در کاربندی‌ها نیز چفد مورد استفاده چفد پنج او هفت است. در مساجد معاصر نیز اکثر تویزه‌های باربر را با چفد پنج او هفت می‌سازند.

همواره نسبت‌های ریاضی بسیار مشخصی بین اجزای مختلف یک چفد برقرار است. در اینجا به نسبت‌های چفد پنج او هفت پرداخته خواهد شد. برای روشن‌ترشدن موضوع، شیوه‌های ترسیم این چفد در ادامه خواهد آمد.

شیوه‌های ترسیم چفد پنج او هفت و هندسه نظری و عملی

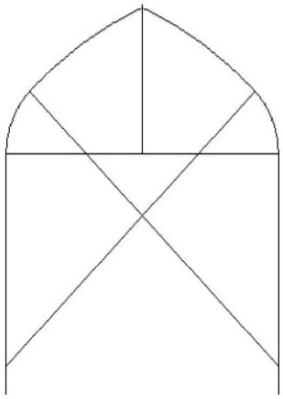
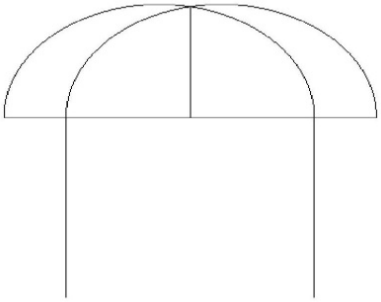
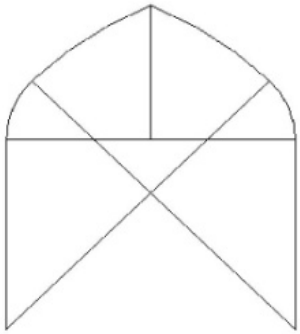
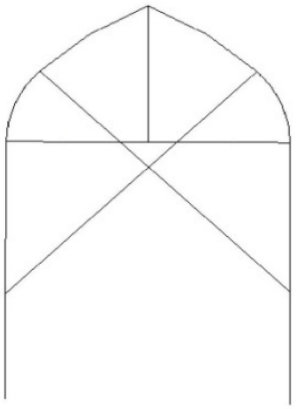
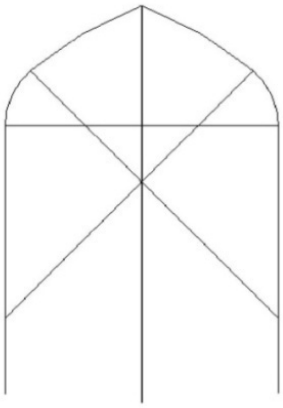
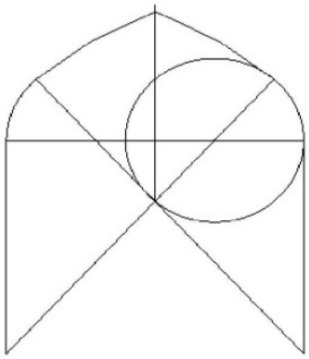
همان‌گونه‌که در جدول۱ آمده است، بسیاری از چفدها از دیدگاه خیز خود به چند دسته تقسیم می‌شوند. چفد پنج او هفت نیز با توجه به خیز آن به سه دسته تقسیم می‌شود؛ تند، کند و کفته (این چفد گونه تیز ندارد). اینجا به گونه‌های چفد پنج او هفت تند پرداخته می‌شود که باربرتر از دوگونه دیگر بوده و در بسیاری از تاق‌های آهنگ و تویزه‌ها به‌کار می‌روند. سپس ویژگی‌های هندسی و ریاضی آن بررسی می‌شود.

پس از بازبینی بسیاری از متون کهن و صحبت با استادکاران معماری سنتی در نقاط مختلف ایران، هفت شیوه ترسیم چفد پنج او هفت به‌دست آمد که سه شیوه آن متداول‌تر است. جالب آنجاست که یکی از مهم‌ترین منابع ریاضی که به معماری پرداخته است، رساله «تاق و ازگ» از غیاث‌الدین‌جمشید کاشانی ریاضی‌دان نامی است که دو روش برای ترسیم چفد پنج او هفت تند آورده است (کاشانی، ۱۳۶۶: ۶۱). دغدغه بسیاری از معماران و کارفرمایان روش محاسبه حجم مصالح به‌کاررفته در ساختمان است. از این‌رو افرادی همچون کاشانی به محاسبات مربوط به تاق‌ها و گنبدها پرداخته و ترسیم‌ها آنها را نیز ذکر نموده‌اند. این مقاله در ادامه بر آن است تا با شیوه‌های نوین و به‌ویژه با روش‌های ریاضی به محاسبه انواع شیوه‌های ترسیم این چفد پرکاربرد معماری ایرانی بپردازد و آنها را با یکدیگر مقایسه کند. البته رویکرد ریاضی‌دانان به معماری و هنرهای وابسته منحصر به جمشید کاشانی نیست و افراد دیگری همچون ابوالوفاء بوزجانی نیز به مسائل گوناگونی دراین باب پرداخته‌اند (البوزجانی، ۱۳۶۹). اما باید به یک نکته کلیدی دیگر هم اشاره کرد، پس از برداشت بسیاری از چفدها این نتیجه آشکار خواهد شد که اندازه‌های چفد برداشت‌شده دقیقاً با آنچه روی کاغذ در ابعاد متناظر می‌توان کشید کمی تفاوت دارد. البته این تفاوت بسیار اندک است و به‌عنوان مثال برای یک چفد در دهانه پنج متری، درحدود سه یا چهار سانتی‌متر می‌باشد. دلیل این عدم انطباق را می‌توان به روش‌های برداشت، دقت ابزار برداشت، سختی برداشت در ارتفاع و همچنین نشست اندک تاق درطول زمان تحت تأثیر بارها یا کشیدن اندود در زیر چفدها دانست که شکل دقیق چفد را پنهان کرده است. اما سازه‌های سنتی ایرانی در پیاده‌سازی هندسه نظری نیز از دقت بالایی برخوردارند. در پیاده‌سازی اندازه‌ها در مواردی کاهش یا افزایش لازم است. این کاهش و افزایش برای مرتب‌کردن اجزای معماری صورت می‌پذیرد تا برای نمونه بتوان یک طرح مشخص را در ابعاد ویژه‌ای که کمی با اندازه‌های طرح تفاوت دارد، اجرا کرد (البته منظور تفاوت اندک در اندازه‌هاست). معماران به این عمل «کست‌افزود» می‌گویند (فرشته‌نژاد، ۱۳۸۹: ۲۷۰). در ادامه، شیوه‌های ترسیم چفدها با دقت زیاد و با استفاده از نرم‌افزار اتوکد آمده است. لازم به یادآوری است که دو نمونه از چفدها کاملاً بر همدیگر منطبق و ازلحاظ ترسیم هم یکسان هستند، به‌طوری‌که در جدول آمده است (جدول۲).

مقایسه هندسی و ریاضی شیوه‌های گوناگون چفد پنج او هفت تند

در ادامه بررسی این چفدها، با استفاده از شیوه ترسیم آنها محاسبات دقیق ریاضی آنها صورت پذیرفت. نخستین گام برای محاسبات مورد نظر، به‌دست‌آوردن فرمول ریاضی

جدول ۲. شیوه‌های گوناگون ترسیم چفد پنج او هفت تند با استفاده از نرم‌افزار اتوکد، (ترسیم از نگارندگان)

		
روش ۳. (پیرنیا، ۱۳۷۳: ۲۰)	**روش ۲.** روش بیضی (پیرنیا، ۱۳۷۳: ۱۸)	**روش ۱.** (پیرنیا، ۱۳۷۳: ۱۷)
		
روش ۶. (زمرشیدی،۱۳۷۳: ۲۰۴)	**روش ۵.** (کاشانی،۶۶۳۱: ۶۱) و (زمرشیدی،۳۷۳۱: ۲۰۸)	**روش ۴.** (کاشانی،۶۶۳۱: ۶۳)

چفدهای مورد نظر بود. برای این کار با استفاده از شیوه ترسیم آنها و انتخاب مرکز دهانه به‌عنوان مرکز مختصات هندسی، فرمول چفد به‌شکل یک معادله چندضابطه‌ای تبدیل شد. گام بعدی محاسبه طول کمان با استفاده از فرمول محاسبه طول کمان بود که برای هر چفد به‌شکل جداگانه به‌دست آمد.

گام بعدی هم به‌دست‌آوردن افراز چفدها و مقایسه آنها با یکدیگر بود. در این گام هم به‌دلیل این‌که هنگام محاسبه فرمول چفدها، مرکز مختصات در روی میانگاه چفدها قرار داده شده بود، کافی بود که به‌جای x در فرمول هر چفد عدد صفر قرار گیرد تا y در آن نقطه که همان H یا افراز چفد بود، به‌دست آید. البته محاسبات مربوط به سطح رویه حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه و حجم حاصل از دوران حول همین محور هم محاسبه شده است (جداول ۳ و ۴ و ۵).

این محاسبات نیز برای اندازه‌گیری تعداد آجر به‌کاررفته در پوسته و محاسبات وزنی متناظر برای برآورد مصالح و همچنین محاسبات سازه‌ای بسیار کاراست. لازم به ذکر است که برخی از این محاسبات دغدغه استادانی چون کاشانی هم بوده است که با ریاضیات هندی و شستگانی انجام پذیرفته است (کاشانی، ۱۳۶۶: ۴۰). برای جلوگیری از طولانی‌شدن مقاله سه روش نخست به‌طور کامل با محاسبات همراه شده است و سایر روش‌ها نیز محاسبه شده و نتیجه به‌دست‌آمده از فرمول‌ها در جدول ۶ آمده است.

در جدول (۶) مقایسه افراز این سه چفد و همچنین طول

جدول ۳. محاسبات ریاضی براساس روش ۱ (نگارندگان)

پارامتر مورد محاسبه	شماره رابطه	رابطه
فرمول چفد	(1)	$y\begin{cases}\sqrt[2]{0.09d^2-(x+0.2d)^2} & -0.5d\le x\le -0.415d\\ -0.78d+\sqrt[2]{(1.28d)^2-(x-0.5d)^2} & -0.415d\le x\le 0\\ -0.78d+\sqrt[2]{(1.28)d^2-(x+0.5d)^2} & 0\le x\le 0.415d\\ \sqrt[2]{0.09d^2-(x-0.2d)^2} & 0.415d\le x\le 0.5d\end{cases}$
h = افراز (بلندا)	(2)	h=0.487d
s = مساحت حاصل از دوران چفد حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(3)	$s=2\left[\int_0^{0.415d}(-0.7d+\sqrt[2]{(1.28d)^2-(x+0.5d)^2}dx+\int_{0.415d}^{0.5d}\sqrt[2]{0.09d^2-(x+0.2d)^2}\ dx\right]=0.32d^2$
v =حجم حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(4)	$V=\pi\int_0^{0.21d}(0.2d+\sqrt[2]{0.09d^2-y^2})^2\,dy+\int_{0.21d}^{0.5d}(-0.5d+\sqrt[2]{(1.28d)^2-(y+0.7d)^2})^2\ dy)$ $=\pi(0.202)d^3=0.6346d^3$
L = طول کمان چفد	(5)	$L=\int_{-0.5d}^{-0.415d}\sqrt[2]{(\frac{0.09d^2}{0.09d^2-(x+0.2d)^2})}\ dx+\int_{-0.415d}^{0}\frac{1.28d}{\sqrt[2]{1.28d^2-(x-0.5d)^2}}\ dx$ $+\int_0^{0.415d}\frac{1.28d}{\sqrt[2]{1.28d^2-(x+0.5d)^2}}\ dx+\int_{0.415d}^{0.5d}\sqrt[2]{(\frac{0.09d^2}{0.09d^2-(x-0.2d)^2})}\ dx$ =1.46d

جدول ۴. محاسبات ریاضی بر اساس روش ۲ (نگارندگان)

پارامتر مورد محاسبه	شماره رابطه	رابطه
فرمول چفد	(1)	$y\begin{cases}\frac{2}{5}\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x-\frac{d}{8})^2} & -0.5d\le x\le 0\\ \frac{2}{5}\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x+\frac{d}{8})^2} & 0\le x\le 0.5d\end{cases}$
h = افراز (بلندا)	(2)	h=0.489d
s = مساحت حاصل از دوران چفد حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(3)	$s=\frac{4}{5}\int_0^{0.2d}\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x+\frac{d}{8})^2}\ dx\ =0.36d^2$
v =حجم حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(4)	$V=\pi\int_0^{0.489d}(-\frac{d}{8}+\frac{5}{4}\sqrt[2]{0.25d^2-y^2})^2\,dy=\pi(0.24)d^3=0.7540d^3$
L =طول کمان چفد	(5)	$L=[\int_{-0.5d}^{0}(\frac{\frac{5}{4}d}{\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x-\frac{d}{8})^2}})dx-\int_{-0.5d}^{0}(\frac{\frac{6}{5}(x-\frac{d}{8})}{\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x-\frac{d}{8})^2}})dx$ $]+[\int_0^{0.5d}(\frac{\frac{5}{4}d}{\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x+\frac{d}{8})^2}})dx-\int_0^{0.5d}(\frac{\frac{6}{5}(x+\frac{d}{8})}{\sqrt[2]{\frac{25}{16}d^2-4(x+\frac{d}{8})^2}})dx]$ $=1.22d+0.48d=1.7d$

جدول ۵. محاسبات ریاضی براساس روش ۳ (نگارندگان)

پارامتر مورد محاسبه	شماره رابطه	رابطه
فرمول چفد	(1)	$y \begin{cases} \sqrt[2]{0.09d^2-(x+0.2d)^2} & -0.5d \le x \le -0.38d \\ -0.7d+\sqrt[2]{1.69d^2-(x-0.5d)^2} & -0.38d \le x \le 0 \\ -0.7d+\sqrt[2]{1.69d^2-(x+0.5d)^2} & 0 \le x \le 0.38d \\ \sqrt[2]{0.09d^2-(x-0.2d)^2} & 0.38d \le x \le 0.5d \end{cases}$
h= افراز (بلندا)	(2)	$h=0.4891d$
s= مساحت حاصل از دوران چفد حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(3)	$s=2\left[\int_0^{0.2236d}(-\sqrt[2]{0.09d^2-y^2}-0.2d)dy+\int_{0.2236d}^{0.4891d}0.5d-\sqrt[2]{1.6639d^2-(y+0.7d)^2}\ dy\right]=0.331d^2$
v =حجم حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه	(4)	$V=\pi\int_0^{0.2236d}(0.2d-\sqrt[2]{0.09d^2-y^2})^2\,dy+\pi\int_{0.2236d}^{0.4891d}(0.5d-\sqrt[2]{1.6639d^2-(y+0.7d)^2})^2\,dy)=0.7344\,d^3$
L =طول کمان چفد	(5)	$L=2(\int_{-0.5d}^{-0.2236d}\sqrt[2]{1+\left(\frac{(x+0.2d)^2}{0.09d^2-(x+0.2d)^2}\right)}\,dx+\int_{-0.2236d}^{0d}\sqrt[2]{1+\left(\frac{(x-0.5d)^2}{1.6639d^2-(x-0.5d)^2}\right)}\,dx)=1.41d$

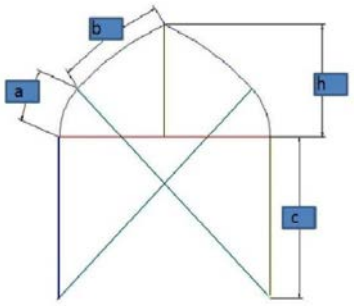
کمان و سطح رویه حاصل از دوران حول محور عمودی گذرنده از تیزه و حجم حاصل از این دوران به‌دست آمده است. در این جدول برای نخستین بار توسط نگارندگان با دید ریاضی به اندازه‌گیری‌های دقیق چفدها پرداخته شده است. در این جداول d برابر با دهانه چفد است.

در جدول (۷) مشخصات ارائه‌شده از نرم‌افزار ترسیمی (نرم‌افزار اتوکد) با یکدیگر مقایسه شده است. طول بخش اول چفد، طول بخش دوم چفد، طول کل چفد، فاصله عمودی پاکار دوم از امتداد AB و بلندای هرکدام از چفدها همگی مقایسه شده است. این جدول براساس

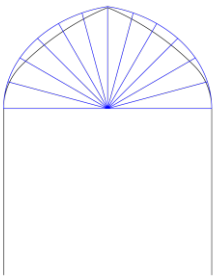
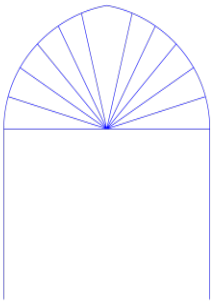
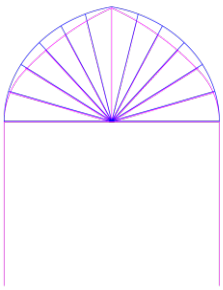
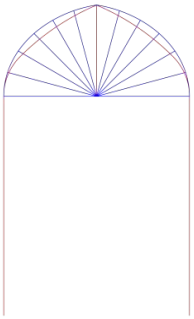
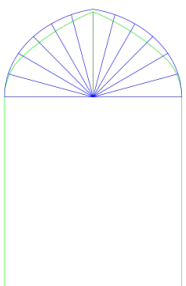
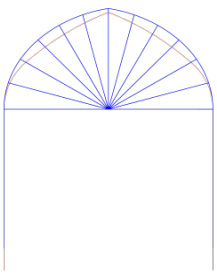
جدول ۶. مقایسه بلندا (افراز)، سطح رویه حاصل از دوران، حجم حاصل از دوران و طول با استفاده از محاسبات ریاضی (نگارندگان)

روش ترسیم	بلندا h	مساحت s	حجم v	طول کمان L
روش ۱	*0.4870d*		0.635	*1.460d*
روش ۲	*0.4890d*		0.754	*1.70d*
روش ۳	*0.4891d*		0.734	*1.412d*
روش ۴	*0.4852d*	*0.31*	0.616	*1.448 d*
روش ۵	*0.4880d*	*0.313*	0.621	*1.461 d*
روش ۶	*0.4714 d*	*0.306*	0.616	*1.443 d*

جدول ۷. مقایسه اجزای گوناگون چفد پنج او هفت تند به روش‌های گوناگون با شیوه هندسی (نگارندگان)

معرفی اجزای گوناگون چفد روی شکل	h (m) بلندای چفد	c (m) مرکز پاکار دوم	L(m) طول کمان 2(a+b)	b (m) طول بخش دوم چفد	a (m) طول بخش اول چفد	روش ترسیم چفد
	۴/۸۸۷۱	۷/۰۰۰۰	۱۴/۶۰۸	۴/۹۴۸۰	۲/۳۵۶۲	روش نخست
	۴/۸۹۹۰	-----	-----	-----	-------	روش دوم
	۴/۸۸۹۴	۷/۰۷۱۱	۱۴/۱۴۱۸	۴/۷۷۰۵	۲/۳۰۰۴	روش سوم
	۴/۸۵۱۲	۷/۸۲۶۲	۱۴/۴۶۳۸	۴/۷۰۸۷	۲/۵۲۳۲	روش چهارم
	۴/۸۸۲۶	۷/۶۳۴۴	۱۴/۶۱۸۲	۴/۸۲۲۹	۲/۴۸۶۲	روش پنجم
	۴/۷۱۹۳	۵/۲۳۵۱	۱۴/۵۰۴۶	۴/۱۲۸۹	۳/۱۲۳۴	روش ششم

جدول ۸. مقایسه هندسی میزان هم‌پوشانی شیوه‌های ترسیم چفد پنج او هفت تند با یکدیگر (ترسیم از نگارندگان)

		
روش ۳. (پیرنیا، ۷۳: ۲۰)	**روش ۲.** روش بیضی (پیرنیا، ۷۳: ۱۸)	**روش ۱.** (پیرنیا، ۷۳: ۱۷)
		
روش ۶. (زمرشیدی، ۲۰۴)	**روش ۵.** (کاشانی، ۶۳) و (زمرشیدی، ۲۰۸)	**روش ۴.** (کاشانی، ۶۳)

جدول ۹. مقایسه ویژگی‌های هندسی اجزای چفد پنج او هفت تند، با روش‌های گوناگون (مأخذ: نگارندگان)

عمق مرکز هندسی (m)	بلندای مرکز هندسی(m)	طول مرکز هندسی (m)	جرم (kg)	حجم(m3)	روش ترسیم چفت پنج او هفت تند
۰/۵۰۰۰	۳/۰۲۳۷	۰/۰۰۰۰	۹/۳۵۸۲	۹/۳۵۸۲	روش نخست
۰/۵۰۰۰	۳/۲۲۱۷	۰/۰۰۰۰	۹/۶۹۱۷	۹/۶۹۱۷	روش دوم
۰/۵۰۰۰	۲/۹۵۶۴	۰/۰۰۰۰	۹/۳۹۶۷	۹/۳۹۶۷	روش سوم
۰/۵۰۰۰	۳/۰۱۰۲	۰/۰۰۰۰	۹/۳۰۱۰	۹/۳۰۱۰	روش چهارم
۰/۵۰۰۰	۲/۹۷۲۷	۰/۰۰۰۰	۹/۳۹۶۷	۹/۳۹۶۷	روش پنجم
۰/۵۰۰۰	۳/۰۳۲۷	۰/۰۰۰۰	۹/۲۷۵۲	۹/۲۷۵۲	روش ششم

طول دهانه ۱۰ متر محاسبه شده است.

در جدول (۸) این چفدها ازلحاظ ویژگی‌های هندسی با هم مقایسه شده‌اند. میزان هم‌پوشانی آنها با یکدیگر مشخص شده است. منظور از هم‌پوشانی در اینجا میزان انطباق چفدهای گوناگون است. این جدول تأکیدی دیگر بر این موضوع است که نه‌تنها چفدها ازلحاظ محاسبات با یکدیگر قابل مقایسه نیستند، بلکه ازلحاظ هندسی و شکل و فرم نیز بر یکدیگر منطبق نیستند.

برای به‌دست‌آمدن اندازه‌های جدول (۹) لازم است ابتدا چفد مورد نظر به‌اندازه یک واحد درراستای zها یعنی عمود بر صفحه ترسیم‌شده چفد امتداد یابد تا تاق‌آهنگ به‌دست آید. محور مختصات در مرکز دهانه فرض می‌شود که منجر به صفرشدن طول مرکز هندسی برای همه نقاط خواهد شد و عمق مرکز هندسی هم ۰/۵ واحد خواهد شد. حجم حاصل از این تاق‌آهنگ نیز محاسبه شده و برای به‌دست‌آوردن جرم تاق کافی است که حجم هر تاق را در جرم حجمی مصالح آن ضرب کرد. در اینجا برای ساده‌شدن کار جرم حجمی برابر با ۱ کیلوگرم بر متر مکعب در نظر گرفته شده است.

نتیجه‌گیری

با مرور جدول (۶) که براساس محاسبات ریاضی به‌دست آمده است، می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

۱. در بین روش‌های ترسیم، چفد به‌روش ششم دارای کمترین بلندا (افراز) است و چفدهای به‌روش سوم و دوم دارای بیش‌ترین بلندا هستند.

۲. مساحت حاصل از دوران حول محور گذرنده از تیزه، در روش ششم از سایر روش‌ها کمتر است ولی در روش دوم مساحت سطح رویه از سایر چفدها بیش‌تر است. یعنی اگر از این چفد گنبدی ساخته شود، میزان اندود یا آمودی (عموماً کاشی) که باید روی این سطح گنبد را بپوشاند، از سایر چفدها بیش‌تر خواهد بود.

۳. حجم حاصل از دوران چفد در روش دوم از سایر روش‌ها بیش‌تر است یعنی برای ساخت آن نیاز به مصالح بیش‌تری می‌باشد. هم‌چنین چفد به‌روش چهارم و ششم کمترین حجم حاصل از دوران را ایجاد خواهد کرد یعنی مصالح کمتری برای ساخت آن نیاز است.

۴. طول کمان چفد دوم بیش از سایر روش‌هاست. به‌بیان دیگر اگر با این چفد تاق‌آهنگی ساخته شود، تاق ساخته‌شده با چفد دوم مصالح بیش‌تری نیاز دارد و تاق‌آهنگ ساخته‌شده با روش سوم کمترین میزان مصالح را نیاز خواهد داشت.

برای بررسی جدول (۷) و مقایسه آن با جدول (۶)، به‌دلیل این‌که جدول (۶) به‌صورت پارامتریک بوده و دهانه در آن با d نشان داده شده است لذا با محاسبه دهانه ۱۰ متر برای جدول (۷) اعداد دو جدول با یکدیگر قابل مقایسه هستند.

با توجه به جدول (۷) می‌توان گفت:

۱. به غیر از روش بیضی در روش‌های دیگر، هر نیمه چفد با دو کمان ترسیم می‌شود.

۲. کمان نخست روش سوم کوچک‌تر از کمان نخست سایر روش‌ها و کمان نخست روش ششم از سایر روش‌ها بزرگ‌تر است.

۳. اگر تاق‌آهنگی را با چفد پنج او هفت تند به‌شیوه‌های شش‌گانه ترسیم و سپس آن را اجرا کنیم، شیوه ششم کم‌بلنداترین روش و شیوه سوم و پس از آن شیوه دوم پرافرازترین تاق را خواهند ساخت.

با ملاک قراردادن چفد بیضی (روش دوم) و بررسی هم‌پوشانی آنها در جدول (۸) نتایج زیر به‌دست خواهد آمد:

۱. چفد به‌روش دوم سایر چفدها را دربرمی‌گیرد. این بدین معناست که چفد دوم بیش‌ترین فضا را در زیر خود پوشش می‌دهد.

۲. چفد به‌روش دوم از میان شانه به‌بعد کم‌کم از سایر چفدها جدا می‌شود و سطح بیش‌تری را در زیر خود پوشش می‌دهد.

۳. کلیه چفدها تقریباً در بربخش بالنج (آغاز کار) برهم منطبق هستند.

با بررسی جدول (۹) نتایج زیر به‌دست می‌آید:

۱. چفد با شیوه دوم دارای بالاترین مرکز هندسی است و چفد با شیوه سوم پایین‌ترین مرکز هندسی را دارد. این نکته صراحتاً آشکار می‌کند که چفد به‌روش بیضی نیز دارای نقاط ضعفی است.

۲. با بررسی حجم و متعاقب آن جرم تاق‌های حاصل از شیوه‌های گوناگون ترسیم‌شده دیده می‌شود که تاق حاصل از چفد دوم دارای بیش‌ترین حجم و بیش‌ترین جرم است یعنی تاق‌آهنگی که با این شیوه ترسیم شود، از همه تاق‌ها سنگین‌تر است و تاق‌آهنگی که با شیوه ششم ترسیم شود از همه تاق‌ها سبک‌تر و بیانگر این است که رفتار تاقی که با روش ششم ساخته شود، در شرایط برابر با سایر روش‌ها به‌دلیل سبک‌بودن از خود رفتار پایدارتری دربرابر زمین‌لرزه از خود نشان می‌دهد و این نکته نیز الزاماً بیانگر ضعف روش بیضی نسبت به سایر روش‌هاست.

منابع

- البوزجانی، ابوالوفاء محمدبن محمد(۱۳۶۹). *هندسه ایرانی*. ترجمه سیدعلیرضا جذبی، چاپ اول، تهران: سروش.
- پیرنیا، محمدکریم(۱۳۷۳). *شماره ویژه اثر، تاق و چفد*. چاپ اول، تهران: میراث فرهنگی.
- پیرنیا، محمدکریم(۱۳۷۸). *تحقیق در معماری گذشته ایران*. چاپ اول، تهران: دانشگاه علم‌وصنعت ایران.
- زمرشیدی، حسین(۱۳۷۳). *تاق و قوس در معماری ایران*. چاپ اول، تهران: کیهان.
- فرشته‌نژاد، مرتضی(۱۳۸۹). *فرهنگ معماری و مرمت معماری*. چاپ اول، اصفهان: ارکان دانش.
- کاشانی، غیاث‌الدین‌جمشید(۱۳۶۶). *رساله تاق و ازج*. ترجمه سیدعلیرضا جذبی، چاپ اول، تهران: سروش.
- گدار، آندره و دیگران(۱۳۷۵). *آثار ایران*. ترجمه ابوالحسن سروقد مقدم، چاپ اول، تهران: آستان قدس رضوی.
- گلمبک، لیزا و ویلبر، دونالد(۱۳۷۴). *معماری تیموری در ایران و توران*. ترجمه کرامت‌الله افسر، چاپ اول، تهران: میراث فرهنگی.

Receive date: 2011/05/12
Admission date: 2012/07/09

The Geometrical and Mathematical Analysis of *Panjohaft* Arches in Iranian Barrel Vaults

Nima Valibeig* **Fatemeh Mehdizadeh**** **Farhad Tehrani*****

Abstract

Iranian major builders have used many different arches for building barrel vaults through the ages. Amongst them, the most common arch is called Panjohaft. Various drawing methods have been recorded for this arch with different geometrical and mathematical characteristics. Calculating the total number of bricks was one of the reasons for writing the book entitled Miftah al-Hisab by Ghyath al-Din Jamshid Kashani. This paper will present another method for the same issue. The paper also presents a new method for measuring the length of arches. Finally, the analysis has been made for various Panjohaft arches through mathematical and geometrical approaches and then various drawing methods have been compared together to reveal the advantages and disadvantages of each for different purposes.

Keywords: arch, barrel vault, Panjohaft, geometrical analysis, increase and decrease

* PhD Candidate, Restoration Faculty, Art University of Isfahan

** Assistant Professor, Architecture Faculty, Science and Industry University, Tehran, Iran

*** Associate Professor, Architecture Faculty, Shahid Beheshti University, Tehran